

Università degli studi di L'Aquila



Problemi di Modellistica e Simulazione

Mariano Spadaccini

21 febbraio 2004

Indice

Licenza	II
Introduzione	II
Problema n° 1	1
Problema n° 2	4
Problema n° 3	6
Problema n° 4	7
Problema n° 5	9
Problema n° 6	13
Problema n° 7	17
Problema n° 8	19

Copyright

Copyright (c) Mariano Spadaccini.

Questo documento può essere riprodotto, distribuito e/o modificato, in tutto o in parte, secondo i termini della GNU Free Documentation License, versione 1.1 o successiva, pubblicata dalla Free Software Foundation; senza Sezioni Non Modificabili, senza Testi Copertina e senza Testi di Retro Copertina.

Introduzione

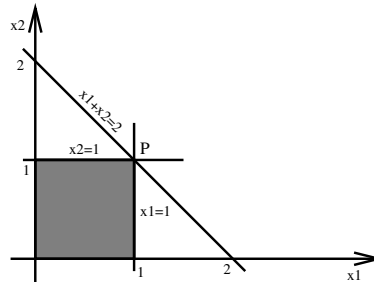
Questo documento è parte integrante dell'esame di *Modellistica e Simulazione*, del corso di laurea di *Ingegneria Elettronica v.o.* della facoltà di Ingegneria de L'Aquila presso Monteluco di Roio, prodotto nell'a.a. 2003-2004.

Problema n° 1 - 15/10/2003

Testo del problema

Verifichiamo che siamo in un caso degenere perché c'è un vincolo che è ridondante.

$$\text{F.C.} \quad \begin{cases} x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases}$$



Soluzione

Per trovare i vertici passo dalla FC alla FS ed introduco le variabili *slack*.

$$\text{F.S.} \quad \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2 \\ x_i \geq 0 \\ \text{con } i = 1..N \text{ in cui } N = 5 \end{cases} \quad m \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Adesso vediamo quanto vale il numero di basi che posso trovare:

$$\#Basi \leq \binom{N}{m} = \frac{N!}{m!(N-m)!} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

Adesso possiamo trovare tutti i vertici del politopo. Le basi che ottengo sono quelle per le colonne:

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{1-2-3} & \boxed{1-2-4} & \boxed{1-2-5} & \boxed{2-4-5} & \boxed{2-3-4} \\ \boxed{2-3-5} & \boxed{3-4-5} & \boxed{1-3-4} & \boxed{1-3-5} & \boxed{1-4-5} \end{array}$$

1-2-3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

1-2-4

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

1-2-5

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

2-4-5

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow 4 \text{ riga} + 5 \text{ riga} = 2 \text{ riga} \rightarrow \text{sono dipendenti} \rightarrow 2-4-5 \text{ non è base}$$

2-3-4

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{NON AMMISSIBILE}$$

2-3-5

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

3-4-5

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \\ x_5 = 2 \end{cases}$$

1-3-4

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{NON AMMISSIBILE}$$

1-3-5

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \longrightarrow 3 \text{ riga} + 5 \text{ riga} = 1 \text{ riga} \rightarrow \text{sono dipendenti} \rightarrow 1-3-5 \text{ non è base}$$

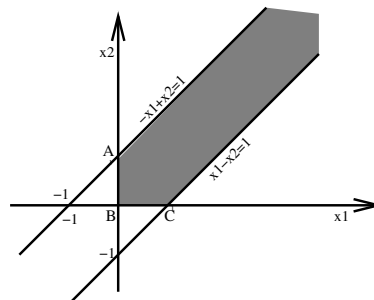
1-4-5

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_4 = 1 \\ x_5 = 1 \end{cases}$$

Problema n° 2 - 15/10/2003

Trovare i vertici di:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$



In-

trodo le variabili *slack*:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_i \geq 0 \\ \text{con } i = 1..N \text{ in cui } N = 4 \end{cases} \quad m \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right.$$

Se # di basi è $\binom{N}{m} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = 6$

Le basi che ottengo sono quelle per le colonne:

1-2 1-3 1-4 2-3 2-4 3-4

1-2

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$ la 1^a colonna e la 2^a sono dipendenti \rightarrow 1-2 non è base

1-3

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ NON AMMISSIBILE

1-4

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2-3

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2-4

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{NON AMMISSIBILE}$$

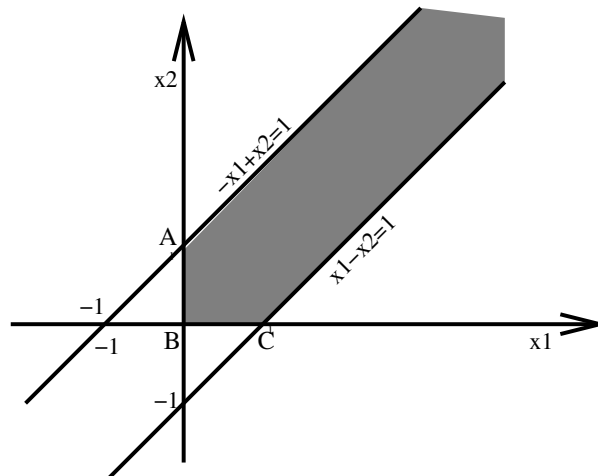
3-4

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Riassumendo in tabella:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
1-2	singolarità				
1-3	-1	0	0	2	non ammissibile
1-4	1	0	0	2	(C)
2-3	0	1	2	0	(A)
2-4	0	-1	0	2	non ammissibile
3-4	0	0	1	1	(B)

in cui si ripropone il disegno del dominio:



Problema n° 3 - 15/10/2003

Problema dei trasporti

$$O = \sum_i^m o_i \quad \longrightarrow \quad \text{offerta complessiva}$$

$$D = \sum_j^n d_j \quad \longrightarrow \quad \text{domanda complessiva}$$

Se $D \leq 0$ \longrightarrow problema *ammissibile*

Se $D = 0$ \longrightarrow problema *bilanciato*

Devo dimostrare che ogni problema *ammissibile* ha come soluzione la stessa di un opportuno problema *bilanciato*.

Dimostrazione

$D < 0$ \longrightarrow problema ammissibile

Introduco un *nodo destinazione* fittizio a cui associo archi entranti di peso nullo; inoltre associo a tali flussi un costo nullo ($c_{i,m+1} = 0$).

Nel nodo $m+1$ ho la domanda d_{m+1} rappresentata dalla quantità $O - D$, cioè introduco il nodo al solo scopo di ottenere $O = D$ poiché avendo costi nulli non modifico la funzione obiettivo; quindi se risolvo il problema *ammissibile* che è sbilanciato risolvo anche il problema bilanciato aggiungendo un nodo fittizio.

Problema n° 4 - 18/10/2003

Sia $A \sim m \times n$ $\text{rank}(A) = m < n$.

Considera:

$$\min_{x, \epsilon} \|\epsilon\|_p$$
$$\epsilon \in \mathbb{R}^m, \quad x \in S = \{x : Ax - b = \epsilon\}$$

Per $p = 2$, questo è il problema dei minimi quadrati.

Dimostrare che

$$\min_{x, \epsilon} \|\epsilon\|_\infty$$
$$\epsilon \in \mathbb{R}^m, \quad x \in S$$

è un problema di PL e ridurlo in FC.

Suggerimento Ricorda che:

$$\|\epsilon\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|\epsilon\|_p = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^m |\epsilon_i|^p \right)^{1/p} = \max_i |\epsilon_i|$$

Svolgimento Osserviamo che ϵ è un vettore con:

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{pmatrix}$$

Se faccio

$$\max_i |\epsilon_i|$$

ho il problema di esprimere il max in R^3 .

Allora considero un intervallo $[-a, a]$ simmetrico rispetto l'origine e lo restringo fino a toccare la più grande componente e_i , cioè

$$\max_i |\epsilon_i| = \max_{-a \leq \epsilon_i \leq a} \{a\}$$

Appena trovo il più grande $|\epsilon_i|$, trovo il più piccolo intervallo $[-a, a]$ che contiene tutte le componenti di ϵ .

Allora il problema totale diventa:

$$\begin{aligned} \min_{*}(\min a) &= \min_{*}\{a\} = \\ &= -[\max_{**}(-a)] \quad \text{in forma canonica} \end{aligned}$$

in cui:

$$* = \begin{cases} x, \epsilon \\ -a \leq \epsilon_i \leq a \\ Ax - b = \epsilon \end{cases} \quad ** = \begin{cases} x, \epsilon \\ Ax \leq \epsilon + b \\ -Ax \leq -\epsilon - b \\ -a \leq \epsilon_i \leq a \end{cases}$$

Problema n° 5 - 21/10/2003

Problema del taglio

Dati

- rotolo largo 16ft e lunghezza infinita
- si riceve il seguente ordine:
 - 200 rotoli larghi 3ft;
 - 50 rotoli larghi 4ft;
 - 150 rotoli larghi 5ft;

Voglio minimizzare il numero di rotoli larghi 16ft da utilizzare per soddisfare l'ordine.

Svolgimento

Sia

n = numero di tagli di larghezza 3ft;

m = numero di tagli di larghezza 4ft;

l = numero di tagli di larghezza 5ft.

Quindi, n , m e l sono numeri interi; le limitazioni su m , n e l sono:

$$\begin{cases} 0 \leq n \leq 5 \\ 0 \leq m \leq 4 \\ 0 \leq l \leq 3 \end{cases}$$

Inoltre, limite superiore ed inferiore per la somma dei tagli sono:

$$\begin{cases} 3n + 4m + 5l \leq 16 \\ 14 \leq 3n + 4m + 5l \end{cases}$$

Per la risoluzione del mio problema genero una matrice in `Matlab` in cui conservo tutte le possibili terne (n, m, l) che posso ottenere (eliminando però tutte le terne (n, m, l) che non hanno significato), evidenziando nelle prime 3 colonne la terna (n, m, l) , e nell'ultima lo scarto che ottengo, cioè $(16 - k)$, in cui $k = 3n + 4m + 5l$.

Tramite il codice `Matlab` seguente:

```
TAB=[];
for n=0:5
  for m=0:4
    for l=0:3
      k=3*n+4*m+5*l;
      if k<=16 & k>=14
        TAB=[TAB; [n,m,l,16-k]];
      end
    end
  end
end
```

ottengo:

$$TAB = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Il problema in esame è un problema di PL ed abbiamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \min f^T X \\ AX \geq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

La funzione Matlab che utilizziamo per la risoluzione del sistema è la seguente:

`X=LINPROG(f,A,b)` solves the linear programming problem:

$$\begin{array}{ll} \min f'*x & \text{subject to: } A*x \leq b \\ x & \end{array}$$

Nel nostro caso i vincoli sono disequazioni del tipo \geq , quindi devo adattarle alla sintassi della funzione citata e, quindi, il sistema dev'essere trasformato nel seguente:

$$\begin{cases} \min f^T X \\ -AX \leq -B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

in cui:

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 150 \\ 50 \\ 200 \end{bmatrix} \quad f^T = \left[\underbrace{1 \quad 1 \quad \dots \quad 1}_{\text{colonne di A}} \right]$$

Otengo la soluzione:

$$X = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 2.7106 \\ 13.3288 \\ 0.0000 \\ 68.3356 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 12.5000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

Si evidenzia che pensare di perturbare la funzione obiettivo per ottenere soluzioni intere (vedi pagina 15) non ha senso poiché la matrice A non è TUM .

Problema n° 6 - 23/10/2003

Turni in ospedale

Dati

Un ospedale lavora su 6 turni di 4 ore ciascuno; i requisiti minimi di presenza medica sono riassunti nella tabella seguente.

turno	orario	n° medici
1°	0-4	4
2°	4-8	7
3°	8-12	9
4°	12-16	12
5°	16-20	8
6°	20-24	6

Ipotizziamo che ogni medico può entrare solo all'inizio di un turno e resta in servizio 8 ore consecutive; il problema è conoscere il numero minimo di medici che deve assumere l'ospedale per soddisfare i requisiti minimi di presenza. Ogni medico può entrare solo all'inizio di un turno e resta in servizio 8 ore consecutive; il problema è conoscere il numero minimo di medici che deve assumere l'ospedale per soddisfare i requisiti minimi di presenza

Svolgimento

Sia

x_i numero di medici che inizia a lavorare nel turno i .

I vincoli sul numero minimo di medici per turno è:

$$\begin{cases} x_1 + x_6 \geq 4 \\ x_1 + x_2 \geq 7 \\ x_2 + x_3 \geq 9 \\ x_3 + x_4 \geq 12 \\ x_4 + x_5 \geq 8 \\ x_5 + x_6 \geq 6 \end{cases}$$

Il problema di PL è il seguente:

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^6 x_i = \min f^T X \\ AX \geq B \end{cases}$$

in cui:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \\ 12 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} \quad f^T = \left[\underbrace{1 \quad 1 \quad \dots \quad 1}_{\text{colonne di A}} \right]$$

La funzione Matlab che utilizziamo per la risoluzione del sistema è la seguente:

`X=LINPROG(f,A,b)` solves the linear programming problem:

$$\begin{array}{ll} \min f' * x & \text{subject to: } A * x \leq b \\ x & \end{array}$$

Nel nostro caso dobbiamo minimizzare il numero di medici, ma i vincoli sono disequazioni del tipo \geq , quindi devo adattarle alla sintassi della funzione citata e, quindi, il sistema dev'essere trasformato nel seguente:

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^6 x_i = \min f^T X \\ -AX \leq -B \end{cases}$$

I parametri che passiamo alla funzione `linprog` sono i seguenti:

linprog(f,-A,-B,[],[],lb)

in cui $lb = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ rappresenta il lower bound del dominio delle soluzioni.

La funzione restituisce i seguenti valori:

$$X = \begin{bmatrix} 2.8195 \\ 4.1805 \\ 6.2315 \\ 5.7685 \\ 3.4541 \\ 2.5459 \end{bmatrix}$$

Notiamo che vorremmo ottenere delle soluzioni intere poiché ciascuna componente del vettore delle soluzioni rappresenta il numero di medici impiegati tra due turni consecutivi; poiché la matrice A è TUM, possiamo ottenere valori interi perturbando la funzione obiettivo attraverso queste semplici linee di codice:

```
Perturb=[rand(1,6)]*0.001;  
f=f+Perturb;
```

ottenendo così i seguenti valori:

$$X_{1,int} = \begin{bmatrix} 2.00 \\ 5.00 \\ 4.00 \\ 8.00 \\ 0.00 \\ 6.00 \end{bmatrix}$$

Perturbando nel verso opposto otteniamo l'altro vertice del politopo che è ugualmente soluzione accettabile per il nostro problema:

```
Perturb=[rand(1,6)]*0.001;  
f=f-Perturb;
```

ottenendo così i seguenti valori:

$$X_{2,int} = \begin{bmatrix} 7.00 \\ 0.00 \\ 10.00 \\ 2.00 \\ 6.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

È evidente che il turno con maggiore presenza di medici è il 4° poiché è quello in cui si richiede un requisito di presenza maggiore rispetto agli altri.

Si richiedeva successivamente la risoluzione del problema duale, in cui:

$$PRIMALE \quad \begin{cases} \min \sum_{i=1}^6 x_i = \min f^T X \\ -AX \leq -B \end{cases}$$

$$DUALE \quad \begin{cases} \max \sum_{i=1}^6 y_i = \max -B^T X \\ -A^T Y \geq f^T \end{cases}$$

Risolvendo il duale tramite la già citata funzione `linprog`, otteniamo i seguenti risultati:

$$Y_{int} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 1.00 \\ 0.00 \\ 1.00 \\ 0.00 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

L'interpretazione di ciascuna riga è la seguente: il numero di medici di cui dobbiamo incrementare ciascun turno quando la rispettiva componente della matrice dei termini noti del primale è perturbata di una unità; infatti, secondo la teoria le variabili duali ci danno una stima della sensibilità del problema primale alla perturbazione dei vincoli.

Problema n° 7 - 4/11/2003

Minimizzare la seguente funzione:

$$\begin{cases} \min J = \hat{J} \\ J = (x_0 + u_0)^2 + (x_1 + u_1)^2 + x_2^2 \\ x_1 = x_0 - u_0 \\ x_2 = 2x_1 + u_1 \\ x_0 \text{ è noto} \end{cases}$$

tradizionale

$$\begin{aligned} \min_{u_0, u_1} \{x_0^2 + u_0^2 + 2x_0u_0 + x_1^2 + u_1^2 + 2x_1u_1 + x_2^2\} = \\ = \min_{u_0, u_1} \{(x_0 - u_0)^2 + (x_0 - u_0 + u_1)^2 + (2x_0 - 2u_0 + u_1)^2\} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial u_0} = -2(x_0 - u_0) - 2(x_0 - u_0 + u_1) - 4(2x_0 - 2u_0 + u_1) = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial u_1} = 2(x_0 - u_0 + u_1) + 2(2x_0 - 2u_0 + u_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2(x_0 - u_0) - 2(x_0 - u_0 + u_1) = 0 \\ 2(x_0 - u_0 + u_1) + 2(2x_0 - 2u_0 + u_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 - u_0 + (2x_0 - 2u_0 + u_1) = 0 \\ x_0 - u_0 + u_1 + (2x_0 - 2u_0 + u_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{u}_1 = 0 \\ x_0 = \hat{u}_0 \end{cases}$$

x_0 arbitrario \longrightarrow \hat{u}_0 arbitrario

$$\begin{cases} \hat{u}_1 = 0 \\ \hat{u}_0 = x_0 \text{ arbitrario} \\ x_1 = x_0 - u_0 \text{ arbitrario} \\ x_2 = 2x_1 + 0 = 2x_1 \text{ arbitrario} \end{cases}$$

P.D.

$$\min\left\{\underbrace{x_0^2 + u_0^2 - 2x_0u_0}_{t=0} + \underbrace{x_1^2 + u_1^2 + 2x_1u_1}_{t=1} + \underbrace{x_2^2}_{t=2}\right\}$$

$$J_2 = x_2^2 = \hat{J}_2$$

$$\hat{J}_1 = \min_{u_1}\{(x_1 + u_1)^2 + \hat{J}_2\} =$$

$$= \min_{u_1}\{(x_1 + u_1)^2 + x_2^2\} =$$

$$= \min_{u_1}\{(x_1 + u_1)^2 + (2x_1 + u_1)^2\}$$

$$2(x_1 + u_1) + 2(2x_1 + u_1) = 0$$

$$\hat{u}_1 = -\frac{3}{2}x_1$$

$$J_1 = (x_1 - \frac{3}{2}x_1)^2 + (2x_1 - \frac{3}{2}x_1)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_1^2 = \frac{1}{2}x_1^2$$

$$\hat{J}_0 = \min_{u_0}\{(x_0 + u_0)^2 + \hat{J}_1\} =$$

$$= \min_{u_0}\{(x_0 + u_0)^2 + \frac{1}{2}x_1^2\} =$$

$$= \min_{u_0}\{(x_0 + u_0)^2 + \frac{1}{2}(x_0 - u_0)^2\}$$

$$2(x_0 + u_0) - (x_0 + u_0) = 0$$

$$\hat{u}_0 = -\frac{1}{3}x_0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}_0 = -\frac{1}{3}x_0 \\ \hat{u}_1 = -\frac{3}{2}x_1 \\ x_1 = x_0 - u_0 = x_0 + \frac{1}{3}x_0 = \frac{4}{3}x_0 \\ x_2 = 2x_1 + u_1 = 2\left(\frac{4}{3}x_0\right) + \left(-\frac{3}{2}x_1\right) = \\ = 2\left(\frac{4}{3}x_0\right) + \left[-\frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}x_0\right)\right] = \frac{2}{3}x_0 \end{array} \right.$$

Problema n° 8 - 12/11/2003

Drift esogeno

d_t è un disturbo costante di cui conosco il valore esatto ad ogni istante t , quindi in realtà è un dato del problema con:

$$\begin{cases} x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + d_t \\ y_t = Cx_t \end{cases}$$

Tramite un'opportuna trasformazione di variabili devo ricondurre il problema ad un problema di inseguimento di traiettoria o *tracking*. Considero:

$$\begin{cases} J = \|e\|^2 + \|u\|_R^2 \\ \hat{J} = \min J = \min \{ \|e\|^2 + \|u\|_R^2 \} \end{cases}$$

$$\text{con } \begin{cases} y_d = 0 \\ y = e \end{cases}$$

Risolvero il problema in tre parti:

1. costo rimanente all'ultimo stadio

$$t = T \\ \hat{J}_T = x_T^T \underbrace{C^T C}_{Q_T} x_T = \hat{J}_T(x_T)$$

Allora

$$\hat{J}_T = x_T^T Q_T x_T = \hat{J}_T(x_T)$$

2. ipotesi induttiva

$$\hat{J}_t = \frac{1}{2} x_t^T s_t x_t + p_t x_t + q_t \quad \text{con } \begin{cases} s_T = Q_T \\ p_T = 0 \\ q_T = 0 \end{cases}$$

3. equazione di Bellman

$$\begin{aligned}\hat{J}_t &= \min \{w_t + \hat{J}_{t+1}\} = \\ &= \min_{u_t} \left\{ \frac{1}{2}x_t^T Q_t x_t + \frac{1}{2}u_t^T p_t u_t + \underbrace{x_{t+1}^T s_{t+1} x_{t+1} + p_{t+1} x_{t+1} + q_{t+1}}_{\hat{J}_{t+1}} \right\}\end{aligned}$$

poiché so che $x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + d_t$

$$\begin{aligned}&= \min_{u_t} \left\{ \frac{1}{2}x_t^T [Q_t + A^T s_{t+1} A] x_t + \frac{1}{2}u_t^T [R + B^T s_{t+1} B] u_t + \right. \\ &\quad \left. + u_t^T [B^T s_{t+1} A x_t + \underbrace{x_t^T A^T s_{t+1} d_t + p_{t+1} A x_t}_{\text{costante}} + \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{u_t^T B^T s_{t+1} d_t + p_{t+1} B u_t}_{\text{costante}} + \underbrace{d_t^T s_{t+1} + p_{t+1} d_t}_{\text{costante}} \right\} \\ &= \min_{u_t} \left\{ \frac{1}{2}x_t^T [Q_t + A^T s_{t+1} A] x_t + \frac{1}{2}u_t^T [R + B^T s_{t+1} B] u_t + \right. \\ &\quad \left. + u_t^T [B^T s_{t+1} A x_t + [d_t s_{t+1} A + p_{t+1} A] x_t + \right. \\ &\quad \left. + [d_t s_{t+1}^T B + p_{t+1} B] u_t + d_t^T s_{t+1} + p_{t+1} d_t \right\}\end{aligned}$$

e minimizzando rispetto ad u_t

$$[R + B^T s_{t+1} B] u_t + [B^T s_{t+1} A] x_t + B s_{t+1}^T d_t + p_{t+1} B = 0$$

quindi

$$\begin{aligned}\hat{u}_t &= -[R + B^T s_{t+1} B]^{-1} \{ [B^T s_{t+1} A] x_t + B s_{t+1}^T d_t + p_{t+1} B \} \\ &= -[R + B^T s_{t+1} B]^{-1} B^T [s_{t+1} A x_t + \underbrace{s_{t+1} d_t + p_{t+1}}_{\text{è la vecchia } s_{t+1}}]\end{aligned}$$